ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I2 1981

Е.А.Митрофанова

ГРУППА $A_{n-1}(n)$ И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ.

В настоящей статье рассматривается группа Ли $A_{n-1}(n)$ преобразований и ее представление - пространство $(n-1)$-мерных параболоидов второго порядка. Получены левоинвариантные формы группы и ее структурные уравнения.

В данный момент нам известны лишь две группы преобразований n-мерного пространства R^n, которые сохраняют алгебраический характер уравнения параболоида произвольного порядка:

$$x^n = b^n + b^n_i x^i + \frac{1}{2} b^n_{ij} x^i x^j + \ldots + \frac{1}{p!} b^n_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1} \ldots x^{i_p}$$

аффинная группа $A(n)$ и группа $A^p_{n-1}(n)$ преобразований вида

$$\begin{cases} \tilde{x}^i = a^i_k x^k + a^i, \\ \tilde{x}^n = a^n_n x^n + a^n + a^n_i x^i + \frac{1}{2} a^n_{ik} x^i x^k + \ldots + \frac{1}{p!} a^n_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1 \ldots i_p}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\det \| a^i_k \| \neq 0$, $a^n_n \neq 0$, $(i, k = 1, \ldots, n-1)$.

Геометрический характер действия группы $A^p_{n-1}(n)$ в пространстве R^n состоит в том, что преобразования (1) определяют послойные аффинные отображения расслоения $R^n \xrightarrow{pr} R^{n-1}$, индуцирующие аффинные преобразования в R^{n-1}. Для упрощения выкладок рассмотрим группу $A_{n-1}(n) = A^2_{n-1}(n)$ как группу Ли, произвольный элемент a которой определяется координатами $(a^i, a^i_k, a^n, a^n_n, a^n_i, a^n_{ik})$, где $a^n_{ik} = a^n_{ki}$.

Размерность такой группы равна $\frac{3n^2 - n + 2}{2}$. Считаем, что группа $A_{n-1}(n)$ действует слева, т.е. $\tilde{x} = f(a, x) = a \cdot x$. Согласно формулам преобразования (1) композиция $(b, a) \to \varphi(b, a) = b \cdot a$ в группе $A_{n-1}(n)$ определяется координатными формулами:

$$c^l_k = b^l_i a^i_k, \quad c^l = b^l_i a^i + b^l,$$

$$c^n_n = b^n_n a^n_n, \quad c^n_i = b^n_n a^n_i + b^n_k a^k_i + b^n_{kl} a^k_i a^l,$$

$$c^n = b^n_n a^n + b^n_i a^i + b^n + \frac{1}{2} b^n_{kl} a^k a^l,$$

$$c^n_{kl} = b^n_n a^n_{kl} + b^n_{ij} a^i_k a^j_l.$$

Формулы (2) позволяют заметить, что c^l, c^n зависят от a^i, a^n также, как преобразуются x^i, x^n. Это дает возможность рассматривать R^n, как фактор-пространство группы $A_{n-1}(n)$ $(a \mapsto (a^i, a^n)$ -фактор-пространство $R^n)$. В проекции R^{n-1} группа $A_{n-1}(n)$ действует как аффинная группа (a^i_k, a^i). В силу (2) имеем, что группа (a^i_k, a^i) является фактор-группой группы $A_{n-1}(n)$ по нормальному делителю $(0, \delta^i_k, a^n, a^n_n, a^n_i, a^n_{ik})$. Можно еще добавить, что $a \to (a^i_k)$, $a \to (a^n_n)$, $a \to (a^i_k, a^n_{kl}, a^n_n)$ тоже фактор-группы группы $A_{n-1}(n)$.

Если записать функцию, дающую групповую композицию $c = \varphi(a, b) = \mathcal{L}_a(b)$ (где $\mathcal{L}_a$ -символ левого сдвига на элемент a), то левоинвариантные формы группы

$$\theta^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial b^\beta} (a^{-1}, b = a) \, da^\beta$$

можно найти из разложения функций φ^α в ряд Тейлора:

$$\varphi^\alpha = (a^{-1}, a + da) = e^\alpha + \theta^\alpha (a, da) + \ldots$$

Для группы $A_{n-1}(n)$ эти формы имеют вид:

$$\theta^l_k = \tilde{a}^l_i \cdot da^i_k, \quad \theta^k = \tilde{a}^k_i \, da^i,$$

$$\theta^n_n = \tilde{a}^n_n \, da^n_n = d \ln a^n_n = d \ln (b^n_n a^n_n),$$

$$\theta^n_k = \tilde{a}^n_n a^i_k \left[d\tilde{a}^\ell_i \, a^n_\ell - a^n_{m\ell} \tilde{a}^m_i \tilde{a}^\ell_j \, da^j \right],$$

$$\theta^n = \tilde{a}^n_n \left[da^n - \tilde{a}^k_i a^n_k \, da^i \right],$$

$$\theta^n_{k\ell} = \tilde{a}^n_n a^j_\ell a^i_k \, d(\tilde{a}^m_i \tilde{a}^t_j a^n_{mt}),$$

где $\tilde{a}^\ell_i \cdot a^i_k = \delta^\ell_k$, $\tilde{a}^n_n = \frac{1}{a^n_n}$, $\ell = const$.

Левоинвариантные формы (3) удовлетворяют следующим структурным уравнениям группы $A_{n-1}(n)$:

$$d\theta^i = \theta^k \wedge \theta^i_k, \quad d\theta^i_k = \theta^\ell_k \wedge \theta^i_\ell,$$

$$d\theta^n = \theta^i \wedge \theta^n_i + \theta^n \wedge \theta^n_n, \quad d\theta^n_n = \theta^n_n \wedge \theta^n_n,$$

$$d\theta^n_i = \theta^u_k \wedge (\theta^k_i - \delta^k_i \theta^n_n) + \theta^k \wedge \theta^n_{ik},$$

$$d\theta^n_{ik} = \theta^n_{pq} \wedge (\theta^p_i \delta^q_k + \theta^q_k \delta^p_i - \delta^p_i \delta^q_k \theta^n_n),$$

откуда сразу следует,что системы форм $\{\theta^k\}$, $\{\theta^i_k\}$, $d\ln a^n_n$, $\{\theta^n_i, \theta^k\}$, $\{\theta^n_{ik}, \theta^n_i\}$-вполне интегрируемы.

Известно,что любая вполне интегрируемая система в произвольной группе играет роль системы полубазовых форм по отношению к расслоению группы на левые классы смежности,которые являются интегральными многообразиями системы уравнений Пфаффа $\bar{\theta}^s = 0$.Оставшиеся при этом структурные уравнения выполняют роль структурных уравнений некоторой подгруппы G' ,породившей это расслоение на классы смежности.Первые интегралы вполне интегрируемой системы $\bar{\theta}^s$,т.е. x^s являются локальными координатами в однородном пространстве $X_n = G/G'$, служащем базой выше указанного расслоения.Тогда для группы $G = A_{n-1}(n)$ можно,например,считать,что a^i_k -первые интегралы вполне интегрируемой системы. θ^i_k есть координаты в фактор -группе $A_{n-1}(n)$ по нормальному делителю $(a^i, \delta^i_k, a^n, a^n_n, a^n_i, a^n_{ik})$.

Список литературы

1.Ф а в а р Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии.М.,1960.